Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 18.12.2014.

Važno: Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte, obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost (svaki korak detaljno raspisati - ništa ne preskakati, prije rješavanja zadatka prepisati postavku (tekst) zadatka, pokušati pisati lijepo i pregledno...)

1. Riješiti matričnu jednačinu $A^{-1}XB = 2A^{-1}X + I$ ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad &+ x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + (2-\lambda)x_2 &+ 3x_3 + 3x_4 = 7 - \lambda \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 &+ x_3 + x_4 = 3 - \lambda \,. \end{aligned}$$

3. (70%)(a) Bez upotrebe H'Lopitalovoh pravila izračunati limes $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Napomena: Zadatak urađen pomoću H'Lopitalovog pravila nosi 0 bodova.

(30%)(b) Odrediti jednačinu tangentne i normale na krivu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ u tačkama u kojima kriva siječe x-osu.

4. Ispitati funkciju

$$y = (2x+1)\,e^{-\frac{2}{x}}$$

i nacrtati njen grafik.

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 18.12.2014.

Važno: Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte, obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost (svaki korak detaljno raspisati - ništa ne preskakati, prije rješavanja zadatka prepisati postavku (tekst) zadatka, pokušati pisati lijepo i pregledno...)

1. Riješiti matričnu jednačinu $AXB^{-1} = 2XB^{-1} - I$ ako su $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + (\lambda-1)x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (2\lambda-2)x_4 &= 2 \,. \end{aligned}$$

3. (70%)(a) Bez upotrebe H'Lopitalovoh pravila izračunati limes $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{4-\sqrt{2x-2}}{3-\sqrt{x}}$.

Napomena: Zadatak urađen pomoću H'Lopitalovog pravila nosi 0 bodova.

(30%)(b) Odrediti jednačinu tangentne i normale na krivu $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ u tačkama u kojima kriva siječe x-osu.

4. Ispitati funkciju

$$y = (\frac{1}{2}x - 1)\,e^{-\frac{1}{x}}$$

i nacrtati njen grafik.

(#) Riješiti matričnu jednačinu $AXB^{-1} = 2XB^{-1} - I$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rj. -upute:

$$AXB^{-1} = 2XB^{-1} - I$$

$$AXB^{-1} - 2XB^{-1} = -I$$

$$(AX - 2X)B^{-1} = -I \quad /\cdot B \text{ sa desne strane}$$

$$AX - 2X = -B$$

$$(A-2I)X = -B \quad /\cdot (A-2I)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (A-2I)^{-1} \cdot (-B)$$

Označimo sa $C = A - 2I$. Tada je $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(C) = 2$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = C^{-1} \cdot (-B) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Riješiti matričnu jednačinu $A^{-1}XB = 2A^{-1}X + I$ ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Rj.-upute:

$$A^{-1}XB = 2A^{-1}X + I$$

$$A^{-1}XB - 2A^{-1}X = I$$

$$A^{-1}(XB - 2X) = I \quad / \cdot A \text{ sa lijeve strane}$$

$$XB - 2X = A$$

$$X(B - 2I) = A \quad / \cdot (B-2I)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X = A \cdot (B - 2I)^{-1}$$

Označimo sa $C = B - 2I$. Tada

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(C) = 2$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{11}{2} & 6 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

traženo rješenje

\# Riješiti sistem i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\;\; + x_3 + x_4 &= 1\\
2x_1 + (2-\lambda)x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 7-\lambda\\
x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 + x_4 &= 3-\lambda
\end{aligned}
$$

Rj.-upute:

Sistem riješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$
\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2-\lambda & 3 & 3 & 7-\lambda\\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 & 3-\lambda \end{array}\right] \overset{II_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 2-\lambda & 7-\lambda\\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda & 3-\lambda \end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \dots \sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{array}\right]
\end{array}
\qquad \dots(*)
$$

Diskusija

1° $\lambda = 2$

$$
\left.\begin{array}{l} \text{rang}(A) = 2\\ \text{rang}(\bar{A}) = 2\\ \text{broj nepoznatih} = 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}}
$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja i dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr prema (*) možemo uzeti

$x_3 = t,\ t\in\mathbb{R},\quad x_3 = s,\ s\in\mathbb{R}$

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ s\\ t\\ 3-t \end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}
$$

2° $\lambda \neq 2$

$$
\left.\begin{array}{l} \text{rang}(A) = 3\\ \text{rang}(\bar{A}) = 3\\ \text{broj nepoznatih} = 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}}
$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja i jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. iz (*) $x_4 = t$

$x_1 = -2,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 3-t,\quad x_4 = t$

(#) Riješiti sistem i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + (\lambda-1)x_4 &= -1 \\
3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (2\lambda-2)x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

Rj. - upute

Sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$
\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & \lambda-1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 2\lambda-2 & 2 \end{array}\right] \sim \dots \sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 4 \end{array}\right]
\end{array}
\quad \dots (*)
$$

Diskusija:

1° $\lambda = 1$

$$
\left.\begin{aligned} \text{rang}(A) &= 2 \\ \text{rang}(\bar{A}) &= 3 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}} \text{sistem nema rješenja}
$$

2° $\lambda \neq 1$

$$
\left.\begin{aligned} \text{rang}(A) &= 3 \\ \text{rang}(\bar{A}) &= 3 \\ \text{broj nepoznatih} &= 4 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Kron.-Kap.}}
$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja i jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

Prema $(*)$ kao proizvoljnu promjenjivu uzet ćemo x_3, tj. $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3-t \\ t \\ \frac{4}{\lambda-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}
$$

traženo rješenje

(#) Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{4-\sqrt{2x-2}}{3-\sqrt{x}}$

Rj.

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \underbrace{\left(=\dfrac{0}{0}\right)}_{\text{neodređen izraz}} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{9-2x-1} \underbrace{\left(=\dfrac{0}{0}\right)}_{\text{neodređen izraz}} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}{(8-2x)(2+\sqrt{x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3+\sqrt{2x+1}}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{4}$ traženo rješenje

(b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{4-\sqrt{2x-2}}{3-\sqrt{x}} \underbrace{\left(=\dfrac{0}{0}\right)}_{\text{neodređen izraz}} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(4-\sqrt{2x-2})(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(4-\sqrt{2x-2})(3+\sqrt{x})}{9-x} \underbrace{\left(=\dfrac{0}{0}\right)}_{\text{neodređen izraz}} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(4-\sqrt{2x-2})(3+\sqrt{x})(4+\sqrt{2x-2})}{(9-x)(4+\sqrt{2x-2})}$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(3+\sqrt{x})(16-2x+2)}{(9-x)(4+\sqrt{2x-2})} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(3+\sqrt{x})\,2\cancel{(9-x)}}{\cancel{(9-x)}(4+\sqrt{2x-2})} = 2\cdot\dfrac{6}{4+4} = \dfrac{2\cdot 6}{8} = \dfrac{6}{4}$

$= \dfrac{3}{2}$ traženo rješenje

(#) Odrediti jednačinu tangente i normale

(a) na krivu $x^2+y^2-2x+4y-3=0$

(b) na krivu $x^2+y^2+4x-2y+3=0$

u tačkama u kojima kriva siječe x-osu.

Rj. -upute:

(a) Za $y=0$ imamo
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$

Kriva siječe x-osu u tačkama $A(3;0)$ i $B(-1;0)$.

$$x^2+y^2-2x+4y-3=0 \quad /'$$
$$2x+2yy'-2+4y'=0$$
$$2yy'+4y'=2-2x$$
$$(2y+4)y'=2-2x \quad /:2$$

$$y'=\frac{1-x}{2+y}$$

$$y'(A)=-1, \quad y'(B)=1$$

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad A(3;0)$$
$$y=(-1)(x-3)$$
$$y=-x+3$$

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1) \quad A(3;0)$$
$$y=1(x-3)$$
$$y=x-3$$

Jednačina tangente na datu krivu u tački $A(3;0)$ je $y=-x+3$ a jednačina normale je $y=x-3$.

$$y-y_1=k(x-x_1) \quad B(-1;0)$$
$$y=1(x+1)$$

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1) \quad B(-1;0)$$
$$y=-1(x+1)$$

Jednačina tangente na datu krivu u tački B je $y=x+1$ a jednačina normale je $y=-x-1$.

(b) $x^2+y^2+4x-2y+3=0$

za $y=0$ $\quad x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

Kriva siječe x-osu u tačkama $C(-3;0)$ i $D(-1;0)$.

$x^2+y^2+4x-2y+3=0 \quad /'$

$2x+2yy'+4-2y'=0$

$2yy'-2y'=-2x-4 \quad /:2$

$(y-1)y'=-x-2$

$y'=\dfrac{-x-2}{y-1}$

$y'(C)=\dfrac{3-2}{0-1}=-1$

$y'(D)=\dfrac{1-2}{-1}=1$

$y-y_1=k(x-x_1)$

C: $\quad y=(-1)(x+3)=-x-3$

D: $\quad y=1(x+1)=x+1$

normale

za C koeficijent normale je 1

za tačku D koeficijent normale je $-\dfrac{1}{k}=-1$

Jednačine tangente na datu krivu u tačkama C i D su redom
$y=-x-3$; $y=x+1$.

Jednačine normale na datu krivu u tačkama C i D su redom
$y=x+3$; $y=-x-1$

Ispitati f-ju $Y=(2x+1)e^{-\frac{2}{x}}$ i nacrtati njen grafik.

Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$\mathcal{D}: x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

F-ja nije ni parna ni neparna.

F-ja nije periodična.

NULE, PRESJEK SA Y-osom, ZNAK

$(-\frac{1}{2};0)$ je nula f-je

f-ja ne siječe Y-osu

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},0)$	$(0,+\infty)$
Y	$-$	$+$	$+$

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=+\infty \Rightarrow x=0$ je V_0A_0 (sa lijeve strane)

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty \Rightarrow$ f-ja nema horizontalnu asimptotu

$Y=2x-3$ je K_0A_0

Poslije ovog koraka počinjemo sa skiciranjem grafa f-je

RAST I OPADANJE

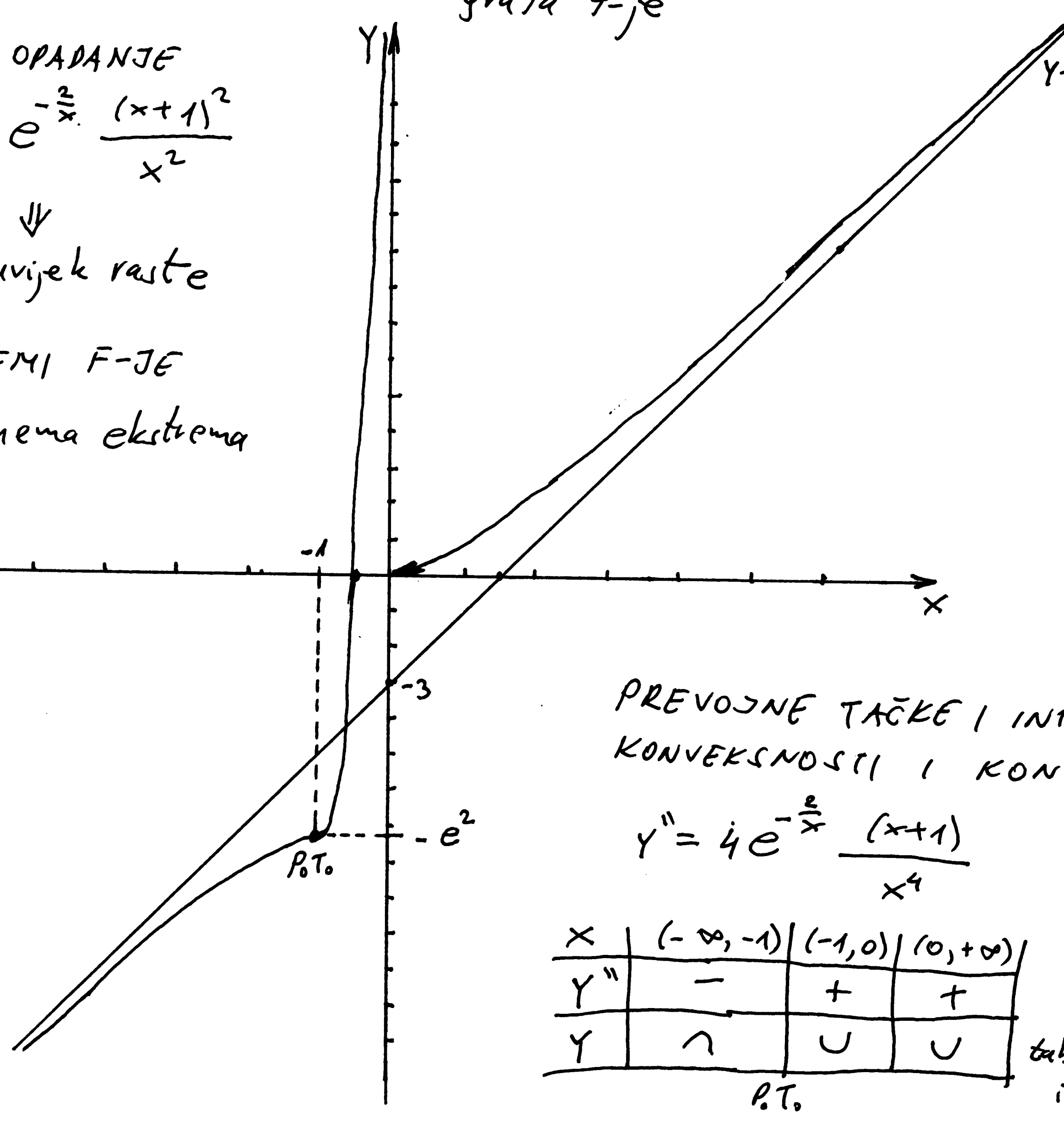
$$Y'=2e^{-\frac{2}{x}}\,\frac{(x+1)^2}{x^2}$$

$\Downarrow$

f-ja uvijek raste

EKSTREMI F-JE

F-ja nema ekstrema



PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$Y''=4e^{-\frac{2}{x}}\,\frac{(x+1)}{x^4}$$

Prevojna tačka je $(-1;-e^2)$

X	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
Y''	$-$	$+$	$+$
Y	$\cap$	$\cup$	$\cup$

P_0T_0

tabela konveksnosti i konkavnosti

(#) Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

Rj.-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$D: x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

F-ja nije ni parna ni neparna.

F-ja nije periodična

NULE, PRESJEK SA Y-osom, ZNAK

$(2;0)$ je nula f-je

f-ja ne siječe Y-osu

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Y	−	−	+

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

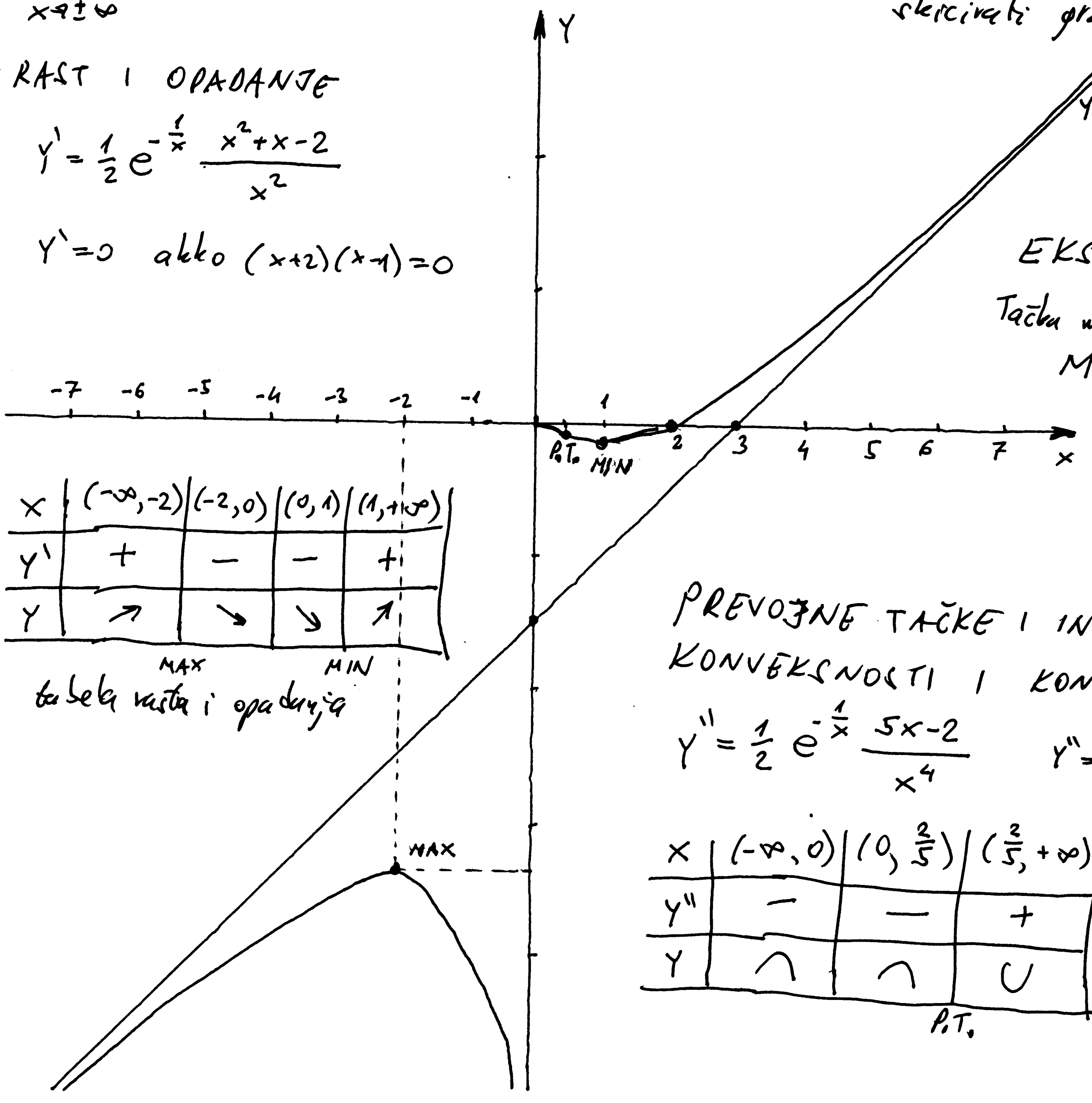
$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ je V.A. (sa lijeve strane

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ f-ja nema H.A.

$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ je K.A.

Poslije ovog koraka počinjemo skicirati graf f-je.



RAST I OPADANJE

$y' = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x}} \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$

$y' = 0$ akko $(x+2)(x-1) = 0$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	+	−	−	+
Y	↗	↘	↘	↗

MAX MIN

tabela rasta i opadanja

EKSTREMI F-JE

Tačka maksimuma je $M(-2; -2\sqrt{e})$

Tačka minimuma je $N(1; -\frac{1}{2}e^{-1})$

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$y'' = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x}} \frac{5x - 2}{x^4}$ $y'' = 0$ akko $x = \frac{2}{5}$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
y''	−	−	+
Y	∩	∩	∪

P.T.

tabela konveksnosti i konkavnosti